数理解析研究所講究録 1282 巻 2002 年 31-54

近可積分系の諸問題をめぐって – 安定性の視点から –

金沢大学理学部　　伊藤 秀一 (Hidekazu Ito)
Faculty of Science, Kanazawa University

1. はじめに

ハミルトン力学系の研究は長い歴史をもつものが多く，周期解の存在や解の安定性といった問題は，オイラー，ラグランジュ，ラプラスらによる天体力学の黎明期から今日に到るまで綿々とその研究が続いている。とくに，今日の力学系理論の創始者といえるポアンカレは，可積分系の摂動（近可積分系）と呼ばれる系の研究を「力学の基本問題」と捉え，その研究を推進した。しばしば，ポアンカレは３体問題が求積できないことを明らかにしたと言われるが，それは近可積分系が一般に摂動パラメータに関して解析的な第一積分をもたないことを主張する結果であり，それが制限３体問題に適用できることから，そのように言われているものである。ポアンカレは制限３体問題の研究を通じて，このほかにも不動点定理やホモクリニック軌道の発見など，今日の力学系理論やシンプレクティック幾何の研究の基礎を成すアイデアを得たと言っても過言ではない。

太陽系の惑星の運動は，太陽が他の惑星に比べてきわめて質量が大きく（太陽の次は太陽の約千分の一の質量の木星），太陽以外の惑星からの引力を無視すればケプラー問題になることから，近可積分系の研究の原型ともいうべきものである。たとえば，ラグランジュとラプラスは定数変化法によって土星の運動を調べているが，それは太陽からの引力によってケプラー運動をする土星に対して，木星からの引力という「摂動」が加わった方程式である。これは木星の質量（太陽の質量との比で考える）をパラメータとする方程式と考えられ，パラメータ値を０とするとケプラー問題，つまり可積分系になる。ここで，木星と土星の公転周期の比は２対５にきわめて近いので，周期的に引力の大きさが変化する。そのような周期的に変動する力の存在は，われわれの身近な経験である「共鳴現象」に照らし合わせると，木星と土星はどんどん接近してついには衝突してしまう，あるいは無限遠方に遠ざかるのでは？ といった恐れを抱かせるものである。このような問題意識は『太陽系の安定性』という大問題につながるものであり，ラグランジュとラプラスは上記の方程式の解（土星の運動）をパラメータに関するベキ級数として表すとき，その係数に永年項と呼ばれる t^k や $t^k \cos \omega t$ のような項が現われないようにできることを示し，それをもって，太陽系は安定であると主張している（[Ar5] 参照)。かりに木星と土星の公転周期は無理数比であると仮定すると，展開式の係数は t の三角級数になるが，彼らはこの三角級数の収束性を示したわけではないので，議論はあくまで形式的である。木星と土星の平均運動（$= 2\pi$/公転周期）を ω_1, ω_2 とすると，この三角級数は

$$\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbf{Z}^2} c_{k_1k_2} e^{\sqrt{-1}(k_1\omega_1+k_2\omega_2)t}$$

なる形で表されるが，係数 $c_{k_1k_2}$ の分母には $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ が現われ，k_1, k_2 が整数全体を動くとき，この値は 0 に集積してしまうため，この三角級数の収束性を示すことはきわめて困難になるのである。この問題は，上に述べた共鳴現象に対応する数理現象として捉えると，きわめて興味深い。そして，その取り扱いの難しさから『小分母の困難』と呼ばれ，今日までさまざまな研究を生んできた。

とくに，摂動問題に対するこのような解の形式的級数表示は準周期運動の存在を予想させるものであり，準周期解の存在をめぐって多くの研究がその後行われている。とくに，永年項が現われないためのさまざまな工夫が 19 世紀後半に行われたが，その中でも Lindstedt の研究が有名であり，今日までその名は「Lindstedt 級数」として残っている。ポアンカレはその級数は発散すると考えたようであるが（[Poi, §149]），じっさいは収束することが，20 世紀半ば過ぎに現われた KAM （Kolmogorov-Arnol'd-Moser）理論によって明らかになった。KAM 理論は可積分系の摂動に対して，摂動の大きさが十分小さい限り，準周期解を乗せた不変トーラスの（正の測度をもつ）族が存在することを主張する。n 体問題に対する準周期解の存在もアーノルド（[Ar2]）によって示された。

KAM 理論は準周期解の存在だけでなく，自由度 2 の時間によらないハミルトン系の平衡解や周期解の安定性の問題に応用することができる。この背後には，自由度 n の系に対する KAM 理論で保証される n 次元不変トーラスは，$2n-1$ 次元のエネルギー曲面上に存在し，$n=2$ ではその余次元は 1 であることから，不変トーラスの隙間から発した解はその隙間に永遠に留まるという事実がある。一方，$n \geq 3$ ではその余次元が 2 以上のため，「不変トーラスの隙間」なるものが意味をもたず，解はエネルギー曲面の上を動き回ることが論理的に可能になる。この隙間を通って移動する解が存在し，不安定性を引き起こすことがあることを，アーノルドは例によって示したが，それは「アーノルド拡散」と呼ばれ，その一般的（generic な）存在を示すことは今日の近可積分系の研究の中心的な課題にもなっている（[Ma] ）。一方，1970 年代後半に Nekhoroshev は，任意の初期データに対して，摂動パラメータに関して指数的に長い間の時間，解は作用変数の初期値の定めるトーラスの近傍に留まることを証明した（[Ne1]，[Ne2]）。これはアーノルド拡散は（起るとしても）摂動パラメータに関して指数的に長い時間を要して起こることを意味し，アーノルド拡散の存在証明の難しさを示唆している。Nekhoroshev の定理をめぐっては，1980 年代半ば以降，イタリアのグループの研究（[BGG1]）に端を発した更なる進展があり，新たな証明法の開発や応用も含めて，その理論は著しく深化している。

本稿の目的は，KAM 理論と Nekhoroshev 理論をめぐる最近の発展について論じることにあり，とくに平衡解の安定性を中心として上述の内容をよりくわしく述べたい。以下では，まず第 2 節で，n 体問題の運動方程式をどのように可積分系の摂動と捉えるかという基本的問題から始めて，可積分系の定義について復習する。第 3 節では，平衡解（あるいは周期解）の安定性についての定義と古典的結果を復習する。第 4 節では，任意のハミルトン系は，平衡解や周期解の近傍ではバーコフ標準形を通じて可積分系の摂動と捉えられることを示す。さらにその際に現われるバーコフ標準化の収束性をめぐって筆者の結果を紹介する。そして第 5 節と第 6 節において，それぞれ KAM 理論と Nekhoroshev 理論をめぐる最近の発展について論じる。

2. n 体問題と摂動論

n 体問題，すなわち，n 個の質点からなる系が万有引力の法則に従うときの運動を考えよう。この運動方程式は，時間の単位を万有引力定数が 1 になるようにとれば，質点 P_k の質量を m_k，その座標を $q_k = (x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}) \in \mathbf{R}^3$ とするとき

$$\ddot{q}_k = -\sum_{j\neq k} \frac{m_j(q_k - q_j)}{|q_k - q_j|^3} \qquad (k = 1, \dots, n) \tag{1}$$

と表される。ここで，$\ddot{q}_k = d^2q_k/dt^2$（本稿を通じてドットによって時間微分 d/dt を表す），$|q_k - q_j|$ は 2 点 $q_k, q_j \in \mathbf{R}^3$ の距離，$\sum\limits_{j\neq k}$ は k と異なるすべての j について加えることを意味する．

たとえば太陽系ならば，太陽（$= P_1$ とする）の質量が他の惑星に比べて非常に大きいから，近似的に太陽以外の惑星からの影響を無視して $m_2 = \cdots = m_n = 0$ とおくと，(1) は

$$\ddot{q}_1 = 0, \qquad \ddot{q}_k = -\frac{m_1(q_k - q_1)}{|q_k - q_1|^3} \qquad (k = 2, \dots, n)$$

となる。ここで太陽 P_1 はある時刻で静止していた（速度 0）とすると，その位置を $\mathbf{R}^3$ の原点にとれば，$\ddot{q}_1 = 0$ より $q_1(t) \equiv 0$ となり，上の方程式は

$$\ddot{q}_k = -\frac{m_1 q_k}{|q_k|^3} \qquad (k = 2, \dots, n) \tag{2}$$

に帰着する．これは $n-1$ 個の分離したケプラー問題であり，可積分系である。各ケプラー問題の有界な解は楕円軌道をなす周期解であり，それらの重ね合わせとして，$n-1$ 連立の系 (2) の有界な解が得られる。これはシステムで考えると，周期的あるいは準周期的な解になる。以上のことから，太陽系の運動方程式 (1) は質量 $m_2, \dots, m_n$ が十分小さいならば近可積分系といえ，その準周期解の存在を考えることの自然さが理解できよう。

とくに $n = 3$ の場合を考え，今度は m_2, m_3 の両方を 0 とはせずに，$m_3 = 0$ とだけおいてみよう。すると (1) は

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \dfrac{m_2(q_2 - q_1)}{|q_2 - q_1|^3}, \qquad \ddot{q}_2 = \dfrac{m_1(q_1 - q_2)}{|q_2 - q_1|^3}, \\ \ddot{q}_3 = \dfrac{m_1(q_1 - q_3)}{|q_1 - q_3|^3} + \dfrac{m_2(q_2 - q_3)}{|q_2 - q_3|^3} \end{cases} \tag{3}$$

となる。この第 1 行は 2 体問題の方程式であり，ケプラー問題に帰着できて，解 $q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t)$ が具体的に求まる。その解を第 2 行の右辺に代入して q_3 の運動を考える問題を**制限 3 体問題**と呼ぶ。たとえば，小惑星の運動を考えるときがその典型例であり，P_1 を太陽，P_2 を木星，P_3 を小惑星とするのである。これは $p_3 = \dot{q}_3$ とおけば，

$$H = \frac{1}{2}|p_3|^2 - \frac{m_1}{|q_1(t) - q_3|} - \frac{m_2}{|q_2(t) - q_3|}$$

をハミルトニアンとする自由度 2 のハミルトン系であり，$m_2 = 0$ とすれば太陽と小惑星の 2 体問題になり可積分であることから，これは木星の質量を摂動パラメータとして近可積分系とみなせる。以下では質量を正規化して $m_1 = 1 - \mu$，$m_2 = \mu$ $(0 \le \mu \le 1)$ とおく。

この解 $q_1(t), q_2(t)$ としてどのような解を考えるかによって異なるタイプの制限３体問題が考えられるが，最もポピュラーなのは質点 P_1, P_2 がともに円軌道を描き，かつそれらの質量中心が原点に静止しているときに，その２体の定める平面上を運動する q_3 を求める問題（平面-円周制限３体問題。図１）である。このとき円軌道の角速度は一定だから，それを α とすると，$a>0$ を $\alpha^2 a^3 = 1$ となる定数として，P_1, P_2 の動径（原点からの距離）はそれぞれ μa，$(1-\mu)a$ となることが示される。そこで，角速度 α の回転座標系を導入し，そこでの q_3 の座標を (x_1, x_2) とする。この座標変換を相空間における正準変換を通じて行えば，質点 P_3 の満たす微分方程式は，次の関数 H をハミルトニアンとする自由度２の時間 t によらないハミルトン系になる（[It4, pp.224-225] 参照）：

$$\begin{cases} H(x,y) = \dfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \alpha(x_2 y_1 - x_1 y_2) - V(x); \\ V(x) = \dfrac{1-\mu}{\sqrt{(\mu a + x_1)^2 + x_2^2}} + \dfrac{\mu}{\sqrt{((1-\mu)a - x_1)^2 + x_2^2}}. \end{cases} \tag{4}$$

この平面-円周型と異なる有名な制限３体問題の例として，平面上を同一質量の２体がそれぞれ楕円運動をし，かつこれらの質量中心が静止しているときに，その質量中心を通りその平面に垂直な直線に沿った質量０の質点の運動を問題にする Sitnikov の問題（図２）を挙げておこう。具体的な天体力学の問題でホモクリニックカオスの存在が示されたのはこの問題が最初であった（[Mo3]）。

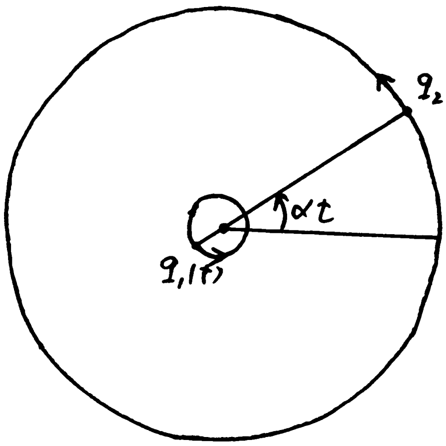


図 1

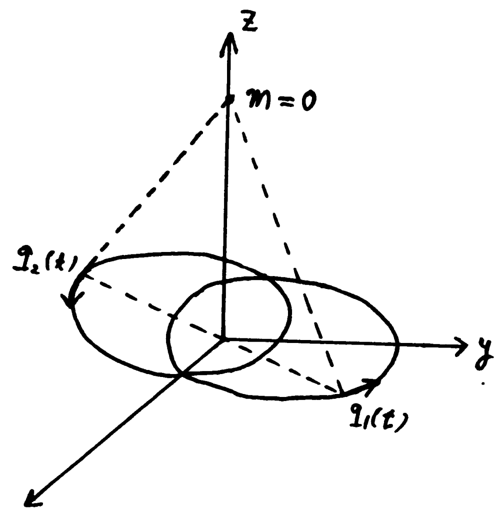


図 2

さて，ここであらためて可積分系の定義を述べておこう。以下では，ハミルトンベクトル場は $\mathbf{R}^{2n}$ の領域で定義されたものとするが，一般に $2n$ 次元シンプレクティック多様体上でハミルトンベクトル場を定義することができて，以下の定義１や定理１は自然と拡張できることを注意しておく。

定義 1　$\mathbf{R}^{2n}$ の領域 D で定義されたハミルトニアン $H(x,y)$ をもつハミルトンベクトル場 X_H は，n 個の関数的に独立かつ包合的な第１積分をもつとき，D 上で**可積分**であるという。

ここで，時間によらないハミルトニアン H は X_H の第1積分であるから，n 個の第1積分のうちの一つは H であると仮定してよい。また，D 上の関数 $G_1,\ldots,G_n$ が**関数的に独立**であるとは，勾配ベクトル $\operatorname{grad} G_1,\ldots,\operatorname{grad} G_n$ が D の稠密な開部分集合上で1次独立なことを意味する。さらに，それらが**包合的**であるとは，それらの任意のポアソン括弧式が恒等的に0になること，つまり

$$\{G_i,G_j\} := \langle \operatorname{grad} G_i, J\operatorname{grad} G_j\rangle = 0 \qquad (i,j=1,\ldots,n), \qquad J=\begin{pmatrix} O & I \\ -I & O\end{pmatrix}$$

を意味する（このことを G_i と G_j は**ポアソン可換**であるともいう)。ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ はユークリッド内積，O，I はそれぞれ n 次の零行列，単位行列である。恒等式 $\{G_i,H\}=0$ は G_i がハミルトンベクトル場 X_H の第1積分であることを意味している。

たとえば，自由度2のハミルトン系 (4) で $\mu=0$ とした系では，$G_2=x_1y_2-x_2y_1$ は系の角運動量であり，これは H と関数的に独立な第1積分である。

可積分系の解は，関数的に独立な n 個の第1積分 G_i $(i=1,\ldots,n,\ G_1=H)$ によって定義される $\mathbf{R}^n$ 値関数

$$G=(G_1,\ldots,G_n)\colon D\to\mathbf{R}^n$$

のレベル集合 $G^{-1}(c)$ （$c=(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbf{R}^n$ は定数ベクトル）の上に拘束される。c が G の正則値ならば，$G^{-1}(c)$ は n 次元多様体であるが，この上のハミルトンベクトル場の流れについて次がいえる。

定理 1 (Liouvile-Arnol'd)　領域 $D\subset\mathbf{R}^{2n}$ 上のハミルトンベクトル場 X_H が可積分とし，$G_1=H,G_2,\ldots,G_n$ をその関数的に独立かつ包合的な第1積分で，$c\in\mathbf{R}^n$ を写像 G の正則値，Σ_c をレベル集合 $G^{-1}(c)$ のコンパクトな連結成分とする。このとき，Σ_c は n 次元トーラス $\mathbf{T}^n(\cong\mathbf{R}^n/2\pi\mathbf{Z}^n)$ に同相であり，$\mathbf{R}^n$ の原点の近傍 U と Σ_c の近傍 V および正準写像（シンプレクティック微分同相写像）$\varphi\colon\mathbf{T}^n\times U\to V$ が存在して，$\varphi(\mathbf{T}^n\times\{0\})=\Sigma_c$ であり，$(\theta,I)\in\mathbf{T}^n\times U$ に対して，$G_i\circ\varphi(\theta,I)$ $(i=1,\ldots,n)$ が I だけの関数となるようにできる。

ここで，座標 θ は**角変数**，I は**作用変数**と呼ばれる。$G_i\circ\varphi=g_i$ とおくと，ハミルトンベクトル場 X_{G_i} はこの作用–角変数では

$$\dot\theta_k=\frac{\partial g_i}{\partial I_k},\qquad \dot I_k=-\frac{\partial g_i}{\partial\theta_k}=0\qquad (k=1,\ldots,n)$$

と表されるから，解に沿って $I_k=$ 定数 であり，その結果，任意の解は

$$\theta_k(t)=\theta_k(0)+\omega_k t,\qquad \omega_k=\frac{\partial g_i}{\partial I_k}(\,I(0)\,)\qquad (k=1,\ldots,n)$$

と求積できる。

これが可積分系は求積できることを示す定理であり，ハミルトンベクトル場の可積分性の定義の自然さを表している。$G_1,\ldots,G_n$ はポアソン可換だからハミルトンベクトル場 $X_{G_1},\ldots,X_{G_n}$ は（Lie 括弧式に関して）可換であり，それらの生成する流れは可換である。とくに $G_1,\ldots,G_n$ はこれらのベクトル場の第1積分であることから，これらの流れはレベ

ル集合 $G^{-1}(c)$ の上に自然に制限できて，その上に $\mathbf{R}^n$ の作用を定義する。定理 1 の証明はこの事実を用いることによって行われる（[Ar4]，[It4] 参照）。

(4) で $\mu = 0$ として得られる回転座標系におけるケプラー問題では，

$$H = -\frac{1}{2I_1^2} - \alpha I_2$$

となるような作用 - 角変数が存在し，Delauney 変数あるいは Kepler 変数と呼ばれる。このとき，I_1^2 の値は楕円軌道の長半径の値に等しく，I_2 は角運動量に等しい。

3. 平衡解の安定性

ハミルトン系の解の安定性は，第 1 節で述べた太陽系の安定性に代表されるように，古くから研究の対象になってきた。『太陽系の安定性』とは，太陽系を形成する惑星が無限遠方に遠ざかったり，あるいは衝突を起こしたりせず，現在と同じような軌道を描くということを意味すると考えられるが，「現在の軌道」が厳密にはわからない以上は，じつは数学的な取り扱いはそう簡単ではない。数学的にはまず，よくわかった特殊解の安定性を調べることが最初に問題になる。

この意味での厳密な安定性の取り扱いは，リアプノフに始まるといえよう。彼は，最も簡単な特殊解である平衡解の安定性をベクトル場の特性指数（線形化ベクトル場の固有値）によって判定する結果を得た。しかし，その際現われる漸近安定性の概念は，ハミルトン系では流れが体積を保つ（Liouville の定理）ことから意味をもたない。じつは，ハミルトン系の平衡解のまわりでの線形化ベクトル場の固有値は $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_n$ という正負の組で現われ，周期軌道の近傍でポアンカレ写像を考えれば，その不動点のまわりでの線形化ポアンカレ写像の固有値は $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ という逆数の組で現われる。これらの事実はもちろん，ハミルトン系の流れのシンプレクティック性と関係している。

これらの事実をふまえて，平衡解の安定性の定義を次のように与えておこう。以下，$t = 0$ で $x = \xi$ となる解を $x(t, \xi)$ と書く。

定義 2　ベクトル場 $\dot{x} = f(x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ が平衡解 $x(t) \equiv x_0$ をもつとする。この平衡解（平衡点）が**安定**であるとは，点 x_0 の任意の近傍 U に対して，x_0 のもう一つの近傍 V が存在して，$t = 0$ で $x = \xi \in V$ となる解 $x(t, \xi)$ はすべての時刻 $t \in \mathbf{R}$ において $x(t, \xi) \in U$ となることをいう。

この定義では，時間について正負両方向に関する安定性を考えている。この意味での安定性が起り得るのは，楕円型平衡点，つまり，特性指数がすべて純虚数の平衡点においてである。その場合の古典的結果は Dirichlet による次の定理である（[SM, §29] 参照）。

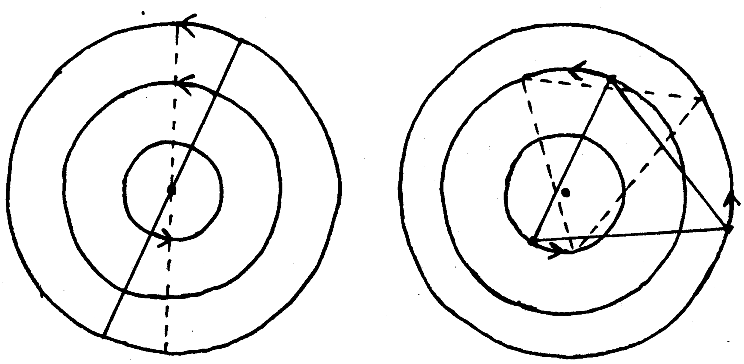
定理 2 (Dirichlet)　$\dot{x} = f(x)$ を $\mathbf{R}^m$ の原点の近傍で定義されたベクトル場で，原点 $x = 0$ が楕円型平衡点であるとする。もしこのベクトル場に対して，原点において極大値（あるいは極小値）をもつ第 1 積分が存在するならば，原点はこの系の安定な平衡点である。

ここでベクトル場 f の第 1 積分を G とすると，原点 $x = 0$ が平衡点であることから，$\operatorname{grad} G(0) = 0$ がわかるので，定理の仮定は $\operatorname{Hess} G(0)$ が定符号のときに成り立つ。

ところで，簡単な考察によって，天体力学では（n 体問題）には平衡解は存在しないことがわかる。これは，すべての天体が静止しているという「平衡状態」は起こり得ないことを意味している。ところが，平面３体問題に対して，つぎに簡単な解として３体が質量中心のまわりを一定の角速度でまわるような周期解が考えられるのである。これはオイラーとラグランジュが導いたものであり，オイラーの解は３体がつねに直線上にあり，一方ラグランジュの解は３体がつねに正三角形の頂点になるようなものである。これらはそれぞれ直線解，正三角形解と呼ばれる（図３）。

そこで，これらの角速度で回転する座標系を導入すると，これらの周期解は静止した解，つまり平衡解になる。しかも角速度が一定であることから，時間に依存した変数変換を行っていながら，変換後のハミルトニアンは再び時間 t を含まない形になる（[SM, §14]）。これは平面３体問題だから，自由度が $3 \times 2 = 6$ の系であり，質量中心（運動量）と角運動量のそれぞれ２つの成分，さらには質量中心が静止していると仮定すると，合計６つの第１積分が存在するので，それらを用いて自由度を削減し自由度３の系に帰着することができる。このとき，平衡解の特性指数は，オイラーの直線解では２つの純虚固有値の組（一組は $\pm\sqrt{-1}$）と実数の正負の組であり，一方ラグランジュの正三角形解では，すべて純虚固有値の組（一組は $\pm\sqrt{-1}$）になる（[SM §18]）。したがって，直線解は安定ではあり得ないが，正三角形解は安定になる可能性がある。しかし，ハミルトニアンの平衡点（正三角形解）のまわりのテーラー展開の２次の項は定符号ではなく，今日までのところ，その安定性を数学的に判定する手段は知られていない。

なお，オイラーの直線解，ラグランジュの正三角形解は前節で考察した平面-円周の制限３体問題に対しても存在する。それは，回転座標系を用いて書いた方程式系 (4) の平衡点であり，図４の $L_1 \sim L_5$ がそれらに相当する。ラグランジュは，全く数学的に見つかったこれらの解が実在するとは思わなかったようであるが，じつは 20 世紀初頭になって L_4, L_5 に対応する点の近くに小惑星群が見つかったのである（それらはトロヤ群と呼ばれる。[Ar5] 参照）。これらの小惑星が安定的に存在し得るかどうかは，平衡点 L_4, L_5 の安定性という数学的な問題になる。これについては以下の第５，６節で議論することにしよう。



直線解　正三角形解

図３

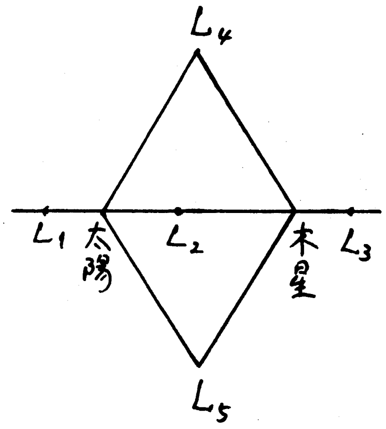


図４

4. バーコフ標準形とその収束・発散

$\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ の原点 $z = (x, y) = (0, 0)$ を平衡点にもつ，解析的なハミルトン系の原点の近傍における解の挙動を考えよう。そのため，ハミルトン系を標準形と呼ばれる形に変換することを考える。とくに標準形の見易さから，ここでは楕円型平衡点の場合を考えることにする。その他の一般の平衡点に対しても，標準形を複素の範疇で考えればその形は統一的に扱えるが，ここでは実の標準形で考えることにする。

まず，楕円型平衡点における線形化ベクトル場が固有値を $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_n$ として対角化可能とすると，適当な線形正準変換を行うことによって，対応するハミルトニアンは次の形に書ける：

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2}(x_k^2 + y_k^2) + O(|x|^3 + |y|^3). \tag{5}$$

ただし，$O(|x|^3 + |y|^3)$ は x_i, y_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ について 3 次以上の項から成る実係数の収束ベキ級数を表す。また，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は同符号とは限らない 0 と異なる実数である。

このハミルトン系を正準変換によって標準化することを考えよう。ベクトル場の標準化の手法はポアンカレによって導入され，彼と Dulac の研究によって発展した。最も簡単なベクトル場は線形系であるから，ハミルトン系を線形化できないか？ と考えたくなるが，楕円型でない一般の平衡点の場合を考えても，ハミルトン系では平衡点の特性指数が正負の組で現れることから，線形化は望めない（[AKN] 参照）。ハミルトン系の標準化はハミルトニアンの正準変換による標準化に帰着され，それはバーコフ（G.D. Birkhoff）によって研究された。

定理 3　(5) の形のハミルトニアン H において，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は自然数 N に対して，条件

$$0 < \sum_{j=1}^{n} |k_j| \le N \text{ を満たすすべての整数 } k_1, \ldots, k_n \text{ に対して } \sum_{j=1}^{n} k_j \alpha_j \neq 0$$

を満たすとする。このとき，原点の近傍で実解析的な正準変換 $z = \varphi(\zeta) = \zeta + O(|\zeta|^2)$ （$\zeta = (\xi, \eta)$ ）によって H を次の形に変換できる：

$$\begin{cases} H \circ \varphi(\zeta) = h(\tau) + O(|\zeta|^{N+1}); \\ h(\tau) = \sum_{j=1}^{[N/2]} h_{2j}(\tau), \quad h_2(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tau_j, \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n), \quad \tau_k = \dfrac{1}{2}(\xi_k^2 + \eta_k^2). \end{cases} \tag{6}$$

ただし，$h_{2j}(\tau)$ は $\tau_1, \ldots, \tau_n$ についての j 次同次式，$[N/2]$ は $N/2$ を越えない最大の整数である。

この定理のハミルトニアン $H \circ \varphi$ の右辺の形を N **次のバーコフ標準形**と呼び，変換 φ を**バーコフ変換**と呼ぶ。バーコフ変換は一意的には定まらないが，関数 $h(\tau)$ は一意的に決まる（[It1] 参照）。換言すると，$h(\tau)$ の係数は正準不変量である。なお，標準形を複素の範疇で考える場合は，関数 $h(\tau)$ は $\tau_k = \xi_k \eta_k$ （$k = 1, \ldots, n$）の複素係数の多項式になる（このとき線形化ベクトル場は対角型になる）。ベクトル場の線形化の場合には，標準形（線形ベクトル場）は特性指数だけによって決まるものであるが，ハミルトン系の標準化では標準形そのものがハミルトニアンに依存することが重要である。

さて，(6) の関数 $h(\tau)$ をハミルトニアンとするハミルトンベクトル場 X_h は可積分である。じっさい，X_h は

$$\dot{\xi}_k = \frac{\partial h}{\partial \eta_k} = \frac{\partial h}{\partial \tau_k}\eta_k, \qquad \dot{\eta}_k = -\frac{\partial h}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial h}{\partial \tau_k}\xi_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

と書けるから，解に沿って

$$\frac{d}{dt}\tau_k = \xi_k\dot{\xi}_k + \eta_k\dot{\eta}_k = 0$$

となり，τ_k は X_h の第 1 積分である。したがって，ベクトル場 X_h の解 $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t))$ は不変トーラス

$$\Sigma_c := \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^{2n} \,|\, \tau_k = c_k(\text{定数}), \quad k = 1, \ldots, n\} \tag{7}$$

の上に拘束され，その上で方程式は線形になる。

この意味で，平衡点の近くのハミルトン系は可積分系によって近似できる。とくに，もし $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が有理数体上 1 次独立ならば（このとき，平衡点は**非共鳴**であると言い，そうでない場合を**共鳴**であるという），ハミルトニアン H は任意の次数 N のバーコフ標準形に変換できるから，ハミルトン系はいくらでも可積分系で近似できることになり，さらに形式的変換 φ で，$H\circ\varphi$ が $\tau_1, \ldots, \tau_n$ だけの形式的ベキ級数になるようなものが存在する。この変換 φ を収束するように選ぶことができるならば，バーコフ標準形 $H\circ\varphi$ の定めるベクトル場は可積分であり，解は不変トーラス上の周期的あるいは準周期的な軌道になる。

定理 1 におけるバーコフ変換 φ は，N 次多項式の母関数によって（[SM §30] 参照），あるいは，多項式ハミルトニアンをもつハミルトン系の時間 1 写像による正準変換を逐次合成することによって定義される（Lie 級数の方法）。この母関数あるいは多項式ハミルトニアンの係数を逐次決定していく際には $\langle k, \alpha\rangle = \sum_{j=1}^{n} k_j\alpha_j$ で割り算を実行する必要があり，係数の分母に $\langle k, \alpha\rangle$ が現われる。非共鳴平衡点の場合には $N = \infty$ とできるが，$|k| \to \infty$ のとき $\langle k, \alpha\rangle$ は 0 に集積してしまうため，この形式的バーコフ変換（あるいはその母関数のべき級数表示）の収束性を示すのはきわめて困難になる。これは第 1 節で述べた『小分母の問題』と同じ問題である。そして，残念ながら一般に収束するバーコフ変換は存在しないことが Siegel（[Sie]）によって明らかにされている。ただし，Siegel は，バーコフ変換が収束しない場合でも非共鳴な楕円型平衡点の近くでは系はいくらでも可積分系で近似できることから，非共鳴平衡点（=原点）の安定性は成り立つのではないかと述べている（[SM, §30] 参照）。この問題については，第 6 節の最後に再度とり上げる。

では，いつ収束するバーコフ変換が存在するのであろうか？そのような変換が存在すれば系は可積分なことは今見たとおりだが，じつはその逆も成り立つのである。

定理 4 [It1]　実解析的なハミルトニアン H に対して，ハミルトンベクトル場 X_H は原点を非共鳴な楕円型平衡点にもつとする。もし，ベクトル場 X_H が n 個の関数的に独立で解析的な第 1 積分 $G_1 = H, G_2, \ldots, G_n$ をもつならば，収束するバーコフ変換 φ が存在する。このとき，n 個の関数 $G_k\circ\varphi(\zeta)$ $(k = 1, \ldots, n)$ は $\tau_1, \ldots, \tau_n$ だけの関数になる。

$G_1\circ\varphi, \ldots, G_n\circ\varphi$ は $\zeta = (\xi, \eta)$-変数についてポアソン可換，つまり $\{G_i\circ\varphi, G_j\circ\varphi\} \equiv 0$ であるから，ポアソン括弧の正準変換による不変性より，変換前の $G_1, \ldots, G_n$ もポアソン可換である。これは，ベクトル場 X_H が可積分であることを意味している。

定理4におけるバーコフ変換 φ は定理3に現われるものと同一であり，それを形式的に定める際には，小分母 $\langle k,\alpha\rangle$ が現われる。ところが，n 個の関数 $G_1\circ\varphi,\ldots,G_n\circ\varphi$ が同時にバーコフ標準形になることから，ある意味で φ（のノルム）に大きな制限が加わることになり，その収束性を示すことができるのである。

なお，バーコフ標準形は平衡点の近くのハミルトン系だけでなく，不動点のまわりの正準写像に対しても定義することができて，定理4と同様の結果が成り立つ（[It1]）。さらに，定理1と定理4をつなぐ次のような結果にも一般化される。すなわち，領域 $D\subset\mathbf{R}^{2n}$ における可積分系の解の挙動は，n 個の関数（第1積分）の定める写像 $G=(G_1,\ldots,G_n)\colon D\to\mathbf{R}^n$ のレベル集合とその近傍での $X_{G_1},\ldots,X_{G_n}$ の不変集合の構造によって決まると考えられる。このように考えると，定理1は写像 G の正則点の近傍を問題にしたものであり，一方定理4では勾配ベクトル $\mathrm{grad}\,G_1,\ldots,\mathrm{grad}\,G_n$ は原点0ですべて消えることから，写像 G の階数0の特異点の近傍を問題にしたものとみなせる。そこで，より一般に写像 G の階数 $k(<n)$ の特異点の近傍を考えると，階数 k の特異点の全体は適当な非退化条件のもとで k 次元不変トーラスの k-パラメータ族をつくり，その近傍は適当な非共鳴条件のもとで $k+1$ 次元以上 n 次元以下の不変トーラスで埋め尽くされることが，k 次元不変トーラスを1点とみなしてバーコフ標準化を行うことによって証明できる（[It2] 参照）。

最後に共鳴平衡点の場合と一般のベクトル場の標準化について少し言及しておこう。共鳴平衡点の場合にも，(5) の形の任意のハミルトニアン H と任意の次数 $N\geq 2$ に対して，関係式

$$H\circ\varphi(\zeta)=h(\zeta)+O(|\zeta|^{N+1}),\qquad \{h,h_2\}=0,\qquad h_2=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\tau_k$$

が成り立つような正準変換（バーコフ変換）$z=\varphi(\zeta)=\zeta+O(|\zeta|^2)$ をみつけることができる。このとき $H\circ\varphi$ の右辺を N 次のバーコフ標準形であるという（Birkhoff-Gustavson の標準形ともいう）。非共鳴平衡点の場合には，この条件は $h(\zeta)$ が $\tau_1,\ldots,\tau_n$ だけの関数になることと同値である。しかし，共鳴の場合には，$h(\zeta)$ は一般に他の変数にも依存する形になり，しかも一意的には定まらない。つまり，別のバーコフ変換をとると，バーコフ標準形が異なるのである。定理4は共鳴が2つの特性指数の間で起こる場合に拡張されており（[It3]，[KKN]），その場合には収束するバーコフ変換の存在は可積分性と同値である。しかし，その同値性は一般の共鳴の場合には成り立たない。この場合には『よい標準形』が存在するように期待されるが，まだ何も結果は知られていない。

ハミルトン系でない一般のベクトル場の場合にも，定理4は以下のように拡張できる。

定理 5　X_1 を原点を非共鳴な楕円型平衡点にもつ $2n$ 次元の実解析的なベクトル場であり，次の条件 [A.1]，[A.2] が成り立つと仮定する。

[A.1] 原点の近傍で解析的な $n-1$ 個のベクトル場 $X_2,\ldots,X_n$ で，次の条件 (i)，(ii) を満たすものが存在する。

(i) $[X_1,X_i]=0\qquad(i=2,\ldots,n)$，　　　（[,] はベクトル場のリー括弧式），

(ii) $X_1,\ldots,X_n$ のテーラー展開の最低次部分（同次多項式）$X_1^0,\ldots,X_n^0$ はある点で1次独立。

[A.2] 原点の近傍で解析的な n 個の関数的に独立な関数 $G_1,\ldots,G_n$ で，ベクトル場 $X_1,\ldots,X_n$ の第1積分となるものが存在する。

このとき，原点の近傍で実解析的な座標変換 $z=\varphi(\zeta)$，$\zeta=(\xi,\eta)\in\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$ で，各ベクトル場 X_i $(i=1,\ldots,n)$ を次の形に変換するものが存在する:

$$\dot{\xi}_j=p_{ij}(\tau)\eta_j,\quad \dot{\eta}_j=-p_{ij}(\tau)\xi_j \qquad (j=1,\ldots,n). \tag{8}$$

ここで，$p_{ij}(\tau)$ は n 変数 $\tau_j=\dfrac{1}{2}(\xi_j^2+\eta_j^2)$ $(j=1,\ldots,n)$ だけに依存する解析的な関数である。このとき，$G_k\circ\varphi$ $(k=1,\ldots,n)$ も $\tau_1,\ldots,\tau_n$ だけの関数になる。

この定理は定理4のベクトル場への一般化であり，標準形 (8) のベクトル場に対して，$\tau_1,\ldots,\tau_n$ は第1積分になり，その解はバーコフ標準形に対するハミルトンベクトル場のときと同様に求積できる。定理の条件としては仮定されていないが，(8) の形より任意の i,j に対して $[X_i,X_j]=0$ が成り立っている。そして座標変換 φ の収束性は，φ によって n 個のベクトル場 $X_1,\ldots,X_n$ と n 個の第1積分 $G_1,\ldots,G_n$ が同時に標準化されることから得られる ([It5])。また，Stolovitch の定理（[St2]）に帰着させて証明することもできる（[St1] も参照)。

この定理の条件のうち，[A.1] (ii) を

(ii)$'$　ベクトル場 $X_1,\ldots,X_n$ はある点で1次独立

と修正すれば，条件 [A.1] と [A.2] を合わせた条件はベクトル場 X_1 の可積分性の定義と呼ぶにふさわしいものであり，明らかにハミルトンベクトル場の可積分性の定義（定義 1）は，$X_{G_i}=X_i$ として条件 [A.1] と [A.2] を満たす。そして，[A.1] と [A.2] のもとで Liouville-Arnol'd の定理に対応する結果も成り立つ（[Bo] 参照。そこではさらに一般的な可積分性の定義が導入されている)。したがって，定理5は条件 [A.1] (ii) を (ii)$'$ に置き換えて成り立つように予想されるが，現時点では証明の技術的理由からまだ成功していない。なお，条件 (ii)，(ii)$'$ ではベクトル場のある1点における1次独立性しか仮定していないが，ベクトル場の解析性から必然的に稠密な開部分集合上での1次独立性が導かれる。

5. KAM 理論

KAM 理論は，ポアンカレが「力学の基本問題」と呼んだ可積分系の摂動

$$\begin{cases} \dot{\theta}_k=\dfrac{\partial H}{\partial I_k}, \qquad \dot{I}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial\theta_k} \qquad (k=1,\ldots,n); \\ H=h(I)+\epsilon f(\theta,I,\epsilon) \end{cases} \tag{9}$$

に対する準周期解の存在を保証する理論であることは周知のとおりである。ここで，$\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in\mathbf{R}^n$，$I=(I_1,\ldots,I_n)\in D$（$D$ は $\mathbf{R}^n$ の領域），$\epsilon\in\Lambda:=(-\epsilon_0,\epsilon)$（$\epsilon_0>0$ は定数）は0に十分近いパラメータであり，h,f はそれぞれ I，(θ,I,ϵ) の実解析関数，f は $\theta_1,\ldots,\theta_n$ について周期 2π の周期関数である。したがって H は $\mathbf{T}^n\times D\times\Lambda$ 上の実解析関数である。

KAM 理論は，1954 年に Kolmogorov が発表した定理（[Ko]）を Arnol'd （[Ar1]）が 1960 年代初頭にその証明を完成し，同時に Moser（[Mo1]）が平面上の可積分に近いねじれ写像（Twist map）に対して同様の結果，つまり準周期軌道を乗せた不変円周の存在（Twist map theorem）を証明したことに端を発しているが，その後もさまざまな本質的な一般化や改良が行われ今日に至っている。すでに 50 年近い歳月が流れているにも関わらず，いまだにその研究が続いているのは，KAM 理論に付随する問題の豊かさ，ひいては「可積分系の摂動」という問題の豊かさの証ともいえよう。

Kolmogorov と Arnol'd は実解析的なハミルトン系を考えたが，Moser は可微分な範疇で Twist map を考察した点が KAM 理論誕生時での大きな違いである。その後，それらの結果はさらに発展し，一連の成果として KAM 理論と呼ばれている。この理論の最大の特徴は，第 1 節で触れた「小分母の困難」を克服したことにある。そのための基本的なアイデアは，非線形方程式を線形近似し，それを逐次解くことによって近似解の列を構成し，その収束をニュートン法と同様の「速い収束」メカニズムによって示す点にあり，その手法は "rapidly convergent iteration method" と呼ばれる。この手法は強力で，1980 年代後半からは，KdV 方程式など可積分な非線形偏微分方程式の摂動論が無限次元ハミルトン系という枠組みで行われるようになり，この手法を発展させることによって準周期解の存在など，数多くの新しい結果が得られている（[Ku1]，[Ku2] 参照）。

さて，有限自由度の近可積分ハミルトン系 (9) を考えよう。KAM 理論の主結果である準周期解をのせた不変トーラスの存在は，有限回微分可能な関数の範疇で述べることができるが（[SZ] を参照），ここでは簡単のため，実解析的な範疇で考えることにする。まず，$\epsilon = 0$ のとき，ハミルトン系 (9) は可積分であり，その解は

$$\theta(t) = \theta(0) + t\omega(I_0), \quad I(t) = I_0(= \text{定数}), \qquad \omega(I_0) = \frac{\partial h}{\partial I}(I_0)$$

で与えられる。n 次元トーラス $I = I_0$ は微分方程式系 (9) の流れで不変である。ここで n 次元ベクトル $\omega(I_0) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ に対して，$\omega_1, \ldots, \omega_n$ が有理数体上 1 次独立ならば，この解は不変トーラス $I = I_0$ を稠密に埋める準周期軌道になる。KAM 理論はこのような準周期軌道が $\epsilon \neq 0$ としたときにも存在しつづけるかどうかを問題にする。その基本的結果を簡単に述べると次のようになる：

定理 6 (KAM)　$|\epsilon|$ が十分小さい近可積分系 (9) において，D 上で $\det(\partial^2 h/\partial I^2) \neq 0$ と仮定する。このとき，D の部分集合 D_ϵ と連続な埋め込み $\varphi_\epsilon\colon \mathbf{T}^n \times D_\epsilon \to \mathbf{T}^n \times D$ が存在して次が成り立つ：

(i) D_ϵ の補集合 $D \setminus D_\epsilon$ のルベーグ測度は，$\epsilon \to 0$ のとき 0 に収束する。
(ii) 写像 φ_ϵ は恒等写像に近く，角変数 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ については実解析的である。
(iii) 任意の $I_0 \in D_\epsilon$ に対して，$\varphi_\epsilon(\mathbf{T}^n \times \{I = I_0\})$ は系 (9) の流れのもとで不変な n 次元不変トーラスであり，その上の任意の解は

$$\varphi_\epsilon(\theta + t\,\omega_\epsilon(I_0), I_0) \qquad (\theta \in \mathbf{T}^n, \quad I_0 \in D_\epsilon)$$

の形で与えられる準周期軌道である。ここで，$\omega_\epsilon(I_0) \in \mathbf{R}^n$ は非摂動系の振動数ベクトル $\omega(I_0)$ に近い。

この定理は，$|\epsilon| > 0$ が十分小さいならば，非摂動系の準周期軌道をのせた不変トーラスのほとんどは摂動後も生き残ることを意味している。また，摂動系の準周期解の振動数ベクトル $\omega = \omega_\epsilon(I_0)$ はディオファントス条件

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \gamma |k|^{-\tau} \qquad (k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}) \tag{10}$$

を満たす。ここで，γ, τ は（一般に不変トーラスごとに異なる）正定数である。ルベーグ測度の意味でほとんどすべてのベクトル $\omega \in \mathbf{R}^n$ はディオファントス条件を満たすことが定理 6 の主張 (i) に対応しており，集合 D_ϵ は複雑な構造をもつカントール集合になる。

KAM 理論の主結果である準周期解をのせた不変トーラスの存在定理は，近可積分系 (9) に対する定理 6 だけでなく，その離散版である近可積分なシンプレクティック写像

$$\theta' = \theta + \omega(I) + \epsilon f(\theta, I, \epsilon), \qquad I' = I + \epsilon g(\theta, I, \epsilon) \qquad (\theta \in \mathbf{T}^n,\ I \in D \subset \mathbf{R}^n) \tag{11}$$

に対しても，非退化条件（Twist 条件）

$$\det \frac{\partial \omega}{\partial I} \neq 0 \tag{12}$$

のもとで成り立つ。この条件 (12) を満たす写像を（高次元の）**Twist 写像**ともいう。また，バーコフ標準形で書かれた平衡点の近傍でのハミルトン系や不動点の近傍でのシンプレクティック写像についても成り立つ（[Ar4]，[AKN] 参照）。これらの諸結果の証明は，すでに述べた「速い収束」を示す逐次近似法が基本になっているが，これについて説明を加えておこう。

Arnol'd の証明（[Ar1]）は，準周期解の振動数は固定せずに正準変換の繰り返しによってハミルトニアンを変換していき，最終的に変換されたハミルトニアンがディオファントス条件を満たす振動数の準周期解の乗った不変トーラスをもつようにするものである。これは「正準変換によってハミルトニアンをできるだけ簡単にする」という，古典的な摂動論の手法（[AKN, Chap.5] 参照）のアイデアを生かした方法であり，Twist 写像に対しても応用できる（[AA]）。この方法は解析的な範疇だけのものであるが，次節で述べる Nekhoroshev 理論との相性もよく，現在では KAM 定理と Nekhoroshev 評価を合わせて証明する手法にも発展している（[DG]，[GiMo]，[JV] 参照）。

Moser は，あらかじめディオファントス条件を満たす回転数 ω を任意に固定し，円周上の無理数回転 $\theta \mapsto \theta + \omega$ の埋め込みを無限回の座標変換の合成によって実現することで，可微分な範疇での Twist map theorem を証明した（[Mo1]．実解析的な場合については [SM, §§32–33] も参照）。定理 6 は主張 (i) を除くと，この方法によって可微分の範疇でも証明することが可能である（[SZ] 参照）。また，可微分な範疇での定理 6 の主張 (i) は Pöschel （[Pos1]）によって示されている。

これら 2 つの方法は，ともに「速い収束」の逐次近似法 “rapidly convergent iteration method” に基づいているが，この方法と根本的に異なり，直接的に準周期解を摂動パラメータについてのべき級数として構成する方法がある。このベキ級数の係数は時間 t のフーリエ級数であり，第 1 節で述べた古典的な Lindstedt 級数の類似物である。その収束証明が 1980 年代半ばに Eliasson（[E2]）によって成されている（論文は長い間プレプリントのままになり，出版年が遅れたようである）。この手法は，Gallavotti らによって場の量

子論における繰り込み群の方法とも関係づけられて発展・整備されていることを注意しておこう（[BG]，[Ga]，[GM]。[GL] も参照）。

さて，定理6の内容に話を戻そう。条件 $\det(\partial^2 h/\partial I^2) \neq 0$ は非退化条件あるいは Twist 条件と呼ばれ，作用変数 I の集合と振動数 $\omega = \partial h/\partial I$ の集合が対応 $I \mapsto \partial h/\partial I$ によって局所的に1対1であることを意味している（逆関数定理）。近年，この条件を弱める試みが多くの研究者によってなされ，さまざまな結果が得られている。それについては [Sev]，[XYQ] およびそこに含まれる文献を参照されたい。

この非退化条件のほかに，等エネルギー的非退化条件と呼ばれるものもある。それは

$$\det\begin{pmatrix} \partial^2 h/\partial I^2 & \partial h/\partial I \\ \partial h/\partial I & O \end{pmatrix} \neq 0 \tag{13}$$

という条件であり（これら2つの非退化条件は互いに独立である），この条件のもとで各エネルギー曲面 $\{H = 定数\}$ 上に準周期軌道をのせた不変トーラスの存在を保証することができる。この場合の定理の証明は，ハミルトン系の流れをエネルギー曲面 $H =$ 定数 に制限したポアンカレ写像を考えると (11) の形になり，Twist 条件 (12) は条件 (13) と同値になることから，Twist 写像に対する KAM 定理に帰着される。また，定理6に帰着させる方法（[BH]）や直接証明を行う方法（[DG]）もある。

等エネルギー的非退化条件が本質的に利いてくる例をあげておこう。

例　ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2) + \epsilon \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

で与えられる近可積分系は

$$\dot\theta_1 = I_1, \quad \dot\theta_2 = -I_2, \quad \dot I_1 = -\epsilon\cos(\theta_1 - \theta_2), \quad \dot I_2 = \epsilon\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

であり，

$$\frac{\partial^2 h}{\partial I^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \partial^2 h/\partial I^2 & \partial h/\partial I \\ \partial h/\partial I & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & I_1 \\ 0 & -1 & -I_2 \\ I_1 & -I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

である。したがって，非退化条件が成り立ち，ほとんどすべての初期条件に対して解は不変トーラス上を動く準周期解になる。ところが，上の第2の行列の行列式は $I_1^2 - I_2^2$ であり，非摂動系のハミルトニアン $h = 0$ の上では等エネルギー的非退化条件は成り立たない。じっさい，

$$\theta(t) = \left(-\frac{1}{2}\epsilon t^2, -\frac{1}{2}\epsilon t^2\right), \qquad I(t) = (-\epsilon t, \epsilon t)$$

は摂動系 X_H の $H = 0$ 上の解であるが，あきらかに

$$|I(t) - I(0)| = \sqrt{2}\epsilon|t| \to \infty \quad (t \to \pm\infty)$$

であるから，エネルギー曲面 $H = 0$ 上には不変トーラスは存在しない。

自由度2の系ではエネルギー曲面は3次元であり，そのなかにあって，2次元不変トーラスで囲まれる領域から発した解は不変トーラスの外側に到達することができない。このことから平衡解や周期解の安定性を証明することができる（[SM, §§34–35]）。これについて，有名なアーノルドの定理を述べておこう。

定理 7 (Arnol'd)　$\mathbf{R}^4$ の原点の近傍で4次のバーコフ標準形で書かれる実解析的なハミルトニアン

$$H = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \tau_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{2} \beta_{k\ell} \tau_k \tau_\ell + O(|z|^5), \qquad \tau_k = \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2), \qquad z = (x_1, x_2, y_1, y_2)$$

に対して，条件

$$\det \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つならば，原点 $z = 0$ はハミルトン系 X_H の安定な平衡点である。

この定理を応用することで，制限3体問題のラグランジュの正三角形解 L_4, L_5 の安定性が証明できる（[SM §35] 参照）。ただし，解の安定性がアーノルドの定理によって保証されるような初期値の領域（第3節の定義2の近傍 V）はきわめて小さく，残念ながら現実の小惑星はそこには含まれない。したがって，単なるアーノルドの定理の応用では現実的な応用力はない。これについては，次節で Nekhoroshev 評価の応用を紹介する。

KAM トーラスはディオファントス条件を満たす回転数ベクトルの準周期解をのせた不変トーラスの存在を保証するが，任意に与えた初期値がそのディオファントス条件を満たす点に対応するかどうかは分かるはずもないことで，その意味で自由度3以上の系に対するKAM 理論の主張は応用上はそれほど強力なものではない。さらに，KAM 定理が成り立つためには摂動パラメータの大きさ ϵ は十分小さいことが必要である．たとえば天体力学では $\epsilon =$ 木星の太陽に対する質量比 とみなせば，$\epsilon \sim 10^{-3}$ であるが，KAM 定理の通常の証明では $\epsilon \sim 10^{-48}$ 程度でなければならないのである（[He]，[Per] 参照）。上述したアーノルドの定理7が実際の応用力に欠けることも同じ理由によるものである。このような摂動パラメータの大きさに関するさまざまな改良は，A. Celletti，L. Chierchia らによってなされている ([CC]，[CGL] 参照)．

KAM 理論の全容については，1990 年代半ばまでの発展については，単行本 [AKN] および [BHS] がくわしいので参照されたい。また，研究集会の報告集 [Sim] には1996年当時の主要な研究者の報告があり，今日でも多くの情報を提供してくれる。

以下この節では，これらの話題の中から，低次元不変トーラスの存在をめぐる最近の進展について取り上げよう。偏微分方程式に対する準周期解の存在が議論できるようになったのは，これから述べる有限自由度での低次元不変トーラスの存在問題がきっかけであった（[Ku1]，[Ku2]，[Pos2] 参照）。

まず，低次元不変トーラスの意味を明確にしておこう。上で述べた定理6は自由度 n の近可積分系に対する n 次元不変トーラスの存在を問題にしている。平衡点の近傍におけるバーコフ標準形を考える場合も，KAM 定理はあくまで n 次元不変トーラスの存在を保証するものである。しかし，たとえば N 次までのバーコフ標準形 (6) を考えるとき，不変

トーラス Σ_c の定義 (7) において，定数 c_k のうちの d 個だけが正で，残りの $n-d$ 個は 0 となる場合を考えてみよう。このとき，Σ_c は X_h の不変集合として，d 次元の楕円型の不変トーラスである。この上の軌道が準周期軌道であるとき，この不変トーラスに近いハミルトン系 X_H の d 次元不変トーラスの存在を問うのは自然なことであろう。この問題は，すでに 1960 年代に Melnikov によって近可積分系の問題として定式化されているが([Me1]，[Me2])，その証明は 1980 年代後半に Eliasson [E1] によってようやく与えられた。

あらためて次の形の自由度 $n+m$ のハミルトニアン

$$H(\theta,I,z)=h(I,z)+f(\theta,I,z),\qquad \theta\in\mathbf{T}^n,\quad I\in D\subset\mathbf{R}^n,\qquad z=(x,y)\in\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m$$

を考えよう。ここで，

$$\frac{\partial h}{\partial z}(I,0)=0$$

と仮定する。このとき，$z=0$ はハミルトン系 X_h の流れで不変な曲面であり，その上で X_h の解は $I_0\in\mathbf{R}^n$ をパラメータとして

$$\theta(t)=\theta_0+\omega t,\quad I(t)=I_0,\qquad \omega=\frac{\partial h}{\partial I}(I_0,0)$$

となる。つまり，$2n$ 次元曲面 $z=0$ は X_h の n 次元不変トーラスの n パラメータ族から成る foliation として捉えられる。

ここで，関数 h を $z=0$ の近傍で z に関して Taylor 展開すると，

$$h(I,z)=h(I,0)+\frac{1}{2}\langle h_{zz}(I,0)z,z\rangle+O(|z|^3)$$

となる。さらに

$$\det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right)(I_0,0)\neq 0$$

と仮定すれば，対応 $I\mapsto(\partial h/\partial I)(I,0)$ は 1 対 1 だから，$I_0\in D$ のかわりに $\omega=(\partial h/\partial I)(I_0,0)$ をパラメータとみなすことができる。そして，トーラス $\mathbf{T}^n\times\{I=I_0\}\times\{z=0\}$ の近傍で $I-I_0$ をあらためて I と見なすと，ハミルトニアン H は

$$\begin{cases} H=N+P;\quad N=h(I_0,0)+\langle\omega,I\rangle+\dfrac{1}{2}\langle A(\omega)z,z\rangle,\\ P=P(\theta,I,z,\omega)=f(\theta,I+I_0,z)+O(|I|^2)+O(|I\,z|)+O(|z|^3)\end{cases}$$

と表すことができる。ここで $A(\omega)=h_{zz}(h_I^{-1}(\omega),0)$ は $2m$ 次の対称行列である。$\{I=I_0,\ z=0\}$ は $f=0$ なる非摂動系 X_h の n 次元不変トーラスであるが，この不変トーラスの近傍での解の挙動にとって重要なのは行列 $JA(\omega)$ の固有値である。ただし J は次の $2m$ 次のシンプレクティック行列である（I_m は m 次単位行列）：

$$J=\begin{pmatrix} O & I_m\\ -I_m & O\end{pmatrix}.$$

この不変トーラスは，$JA(\omega)$ のすべての固有値が 0 でない実数部分をもつときに双曲型，すべての固有値が純虚数のときに楕円型と呼ばれる。双曲型の不変トーラスの摂動につい

ては，以前から Moser，Graff（[Mo2], [Gr]）らによって研究され，通常の KAM 理論におけるディオファントス条件 (10) のもとで n 次元不変トーラスが存在することが示されていた。一方，楕円型の場合は Melnikov（[Me1]，[Me2]）が

$$H = N + P; \quad N = \sum_{k=1}^{n} \omega_k I_k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \Omega_j(\omega)(x_j^2 + y_j^2), \qquad P = P(\theta, I, x, y, \omega) \tag{14}$$

なる形のハミルトニアンに対して，(ω, Ω) に近く，条件

$$|\langle k, \hat{\omega}\rangle + \langle \ell, \hat{\Omega}\rangle| > \frac{1}{2}\gamma|k|^{-\tau}, \qquad |\ell| \le 2$$

を満たす振動数ベクトル $(\hat{\omega}, \hat{\Omega})$ をもつ n 次元不変トーラスが存在するという結果を発表した。その証明はすでに述べたように，Eliasson によって与えられ，Pöschel は仮定を少し弱めた形で同様の結果を得ている。彼らの結果の正確な定式化は論文 [E1] と [Pos2] にゆずり，ここでは，ごく最近 J. Xu と J. You によって得られた結果を紹介しよう。

定理 8 [XY]　自由度 $n+m$ の実解析的なハミルトニアン (14) において，$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ は集合 $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$ 上を動くとし，条件

$$\text{任意の } k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\} \text{ に対して} \quad \langle k, \omega\rangle \not\equiv 0 \quad \text{かつ} \quad \langle k, \omega\rangle + \Omega_j(\omega) \not\equiv 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

が成り立つとする（$\not\equiv 0$ は $\omega \in \mathcal{O}$ の関数として恒等的に 0 ではないことを意味する）。このとき，摂動 P が十分小さいならば，大部分の $\omega \in \mathcal{O}$ に対して，ω に十分近い振動数 ω_* をもつ準周期軌道をのせた n 次元不変トーラスが存在する。ここで，振動数 ω_* は $|\langle k, \omega_*\rangle| > \alpha(|k|+1)^{-n}$（$\alpha$ は十分小さい正数）なる形のディオファントス条件を満たす。

この定理において，摂動 P の大きさは，適当な重み付けをしたノルムによって測る（論文 [XY] 参照）。また，非退化条件 $\det(\partial^2 h/\partial I^2) \neq 0$ が成り立つならば，$\omega = \partial h/\partial I$ であり，ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合を動くから，定理の条件のうち，最初の $\langle k, \omega\rangle \not\equiv 0$ は必然的に成り立つ。なお，この定理は「パラメータを含んだ KAM 定理」であり，通常の KAM 定理（定理6）と全く同じ形式に書き下すのは難しいように思われるので，ここではあえて「大部分の $\omega \in \mathcal{O}$」という言い方で述べた。より厳密な叙述については [XY] を参照されたい。

6. Nekhoroshev 評価

すでに述べたように，KAM 理論は自由度2の系に対しては平衡解や周期解の安定性を導くが，自由度3以上の系ではそのメカニズムが機能しない。逆にアーノルドは，解の不安定性を導くメカニズムとして，可積分系の摂動によって低い次元の双曲型の不変トーラスが生まれ，その不安定多様体（ひげの生えたトーラス “whiskered tori”）の「遷移的連鎖」と呼ばれる複雑な交叉を渉りながら解が KAM トーラスの隙間から抜け出るメカニズムを提唱した。そして，このメカニズムを用いることで，どんなに摂動パラメータの値が小さくても，有界領域に留まらない解が存在するような，自由度3（正確には，時間に周期的に依存する自由度2）の近可積分系の例を構成した（[Ar3], [AA] 参照）。これが今日アー

ノルド拡散と呼ばれる現象である。これについての最近の進展については，文献 [BCV]，[Lo3]，[Xia]，[Ma] などを参照されたい.

これから述べる Nekhoroshev 評価は，アーノルド拡散が起こるとしてもそのスピードはきわめて遅いことを保証する結果であり，近可積分系の任意の解が摂動パラメータに関して指数的に長い時間，作用変数が初期値の近くに留まること（これを**指数的安定性**という）を主張する。これは，近可積分系 (9) の任意の解の作用変数の値 $I(t)$ が評価式

$$\|I(t)-I(0)\| \le R\epsilon^b \qquad \left(|t| \le T\exp(\epsilon^{-a})\right)$$

を満たすことを意味する。ここで，R，T，a，b は正の定数である。指数 a,b は安定指数と呼ばれ，大きければ大きいほどより良い安定性の評価になる。

Nekhoroshev はこの結果を可積分ハミルトニアンが “steep” という条件のもとで証明している。その後おもに Benettin，Giorgilli らのイタリアのグループの研究（[BGG1]，[BGG2]）がきっかけになって応用も含めて発展し，steep よりは強い（しかし十分に自然な）“quasi-convex” という条件のもとで，安定指数 a,b の精密な評価が行われるようになった。ここでは，Pöschel（[Pos3]）によって得られた定理をくわしく述べよう。

D を $\mathbf{R}^n$ の領域とし，$h(I)$ を作用変数 $I \in D$ の実解析的な関数とし，D の複素近傍

$$D_r := \{I \in \mathbf{C}^n \mid \|I-D\| < r\}$$

上で解析的とする。ただし，$\|I-D\|<r$ は 点 $I \in \mathbf{C}^n$ がユークリッドノルムに関して D から距離 r に含まれることを意味する。この関数 h が ℓ,m**-quasiconvex** であるとは，任意の $I \in D_r \cap \mathbf{R}^n$ を固定するとき，すべての $\xi \in \mathbf{R}^n$ に対して次の少なくとも一方の不等式が成り立つことをいう:

$$\text{(i)} \quad \left|\langle \frac{\partial h}{\partial I}(I), \xi\rangle\right| > \ell\|\xi\|, \qquad \text{(ii)} \quad \langle \frac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I)\xi, \xi\rangle \ge m\|\xi\|^2.$$

これは $\langle \partial h/\partial I, \xi\rangle = 0$ を満たす $\xi \in \mathbf{R}^n$ に対して (ii) が成り立つことを意味する。したがって $h(I) =$ 定数 で定まる曲面は凸である。さらに，このとき等エネルギー的非退化条件 (13) が成り立つことも容易にわかる ([Lo1, p.76]. [BHS, p.111] も参照)。

さらに $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/2\pi\mathbf{Z}^n$ の複素近傍 $\mathbf{T}^n_s$ を

$$\mathbf{T}^n_s := \{\theta \in \mathbf{C}^n \mid |\operatorname{Im}\theta_k| < s \quad (k=1,\dots,n)\}$$

と定義し，$\mathbf{T}^n_s \times D_r$ の近傍で解析的かつ $\theta_1,\dots,\theta_n$ について周期 2π をもつ関数 $f(\theta,I) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f_k(I)e^{i\langle k,\theta\rangle}$ のノルム $\|f\|_{D,r,s}$ を次のように定義する：

$$\|f\|_{D,r,s} := \sup_{I\in D_r}\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}|f_k(I)|e^{|k|s} \qquad (|k| = |k_1|+\cdots+|k_n|)$$

また，正の定数 r, M, A を

$$r \le \frac{4\ell}{m}, \qquad \sup_{I\in D_r}\left\|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right\| \le M < \infty, \qquad A = \frac{11M}{m}$$

と定義し，

$$\epsilon_0 := \frac{mr^2}{2^{10}A^{2n}}$$

と定める。ただし，$\|\partial^2 h/\partial I^2\|$ は行列 $\partial^2 h/\partial I^2$ の作用素ノルムである。

このとき次の評価が成り立つ。

定理 9 [Pos3]　$H(\theta,I)=h(I)+f(\theta,I)$ を $\mathbf{T}^n_s \times D_r$ 上の実解析関数，h は $D_r \cap \mathbf{R}^n$ 上で ℓ, m-quasiconvex であり，正数 $\epsilon \le \epsilon_0$ に対して

$$\|f\|_{D,r,s} \le \epsilon$$

が成り立つとする。このとき，ハミルトン系 X_H の $(\theta(0), I(0)) \in \mathbf{T}^n \times D$ を満たす任意の解 $(\theta(t), I(t))$ に対して

$$\|I(t)-I(0)\| \le R_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^a \qquad \left(|t| \in T_0 \exp\left(\frac{s}{6}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{-b}\right)\right)$$

が成り立つ。ただし，$\|\bigl(\partial h/\partial I\bigr)(I(0))\| \le \dfrac{mr}{8}$ のときは $\|I(t)-I(0)\| \le r$ がすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して成り立つ。ここで，a, b, R_0, T_0 は次で与えられる正の定数である:

$$a=b=\frac{1}{2n}, \qquad R_0=\frac{r}{A}, \qquad T_0 = A^2\frac{s}{\Omega} \qquad \Bigl(\text{ただし}\ \ \Omega = \sup_{\|I-I(0)\|\le R_0} \|\omega(I)\|\Bigr).$$

ここで得られた安定指数 a，b の値は，任意の解に対して成り立つ評価としては，$a=b$ とした場合の最良のものと考えられている（[Lo1]，[Lo2] 参照)。

この定理の証明は，Nekhoroshev によるオリジナルの証明（[Ne1]，[Ne2]）のアイデアによる方法と，周期軌道だけを乗せた不変トーラスに着目する方法（Lochak [Lo1]，[Lo2]）の 2 通りがあり，Pöschel は前者によって上記の定理を証明し，それと独立に Lochak と Neishtadt は後者の方法によって同値な定理を示している（[LoN])。

古典的なポアンカレによる摂動論をふりかえると，ハミルトニアン $H=h+f$ に対して，正準変換 $(\theta, I)=\varphi(\theta', I')$ によって $H\circ\varphi$ ができるだけ簡単な形（最も簡単なのは作用変数 I' だけの関数）になるようにすることが問題になる。このとき，正準変換の母関数のフーリエ級数の係数の分母には $\langle k, \omega(I)\rangle$ が現われ，それが「小分母」となる（[AKN, pp.175-176] 参照)。そこで，かりに，ある正数 K, α が存在して，任意の $I \in D$ に対して

$$|\langle k, \omega(I)\rangle| \ge \alpha \qquad (\,k \in \{k \in \mathbf{Z}^n \mid |k| \le K\}\,) \tag{15}$$

となるとしよう。すると，適当な正準変換 φ によって

$$H\circ\varphi = h + f_*; \qquad \|f_*\|_{D,r,s} \le e^{-Ks/6}\epsilon$$

とできて，その結果

$$\|I(t)-I(0)\| \le r \qquad \left(|t| \le \frac{sr}{5\epsilon}e^{Ks/6}\right) \tag{16}$$

となることが証明できるのである（[Pos3] 参照)。このように，剰余項 f_* が K について指数的に小さくなるようなハミルトニアンに変換することが指数的安定性を導く鍵になる。

もちろん，条件 (15) は一般に成り立たないから，さまざまな工夫が必要である。上記の Nekhoroshev のアイデアにもとづく方法では，領域 D をさまざまな「共鳴ブロック」と呼ばれる領域によって覆い，各ブロックごとに (15) と類似の評価が成り立つようにするのである。このとき，その評価式に現れる定数 K は

$$K = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^a, \qquad a = \frac{1}{2n}$$

と取れることが示せて，その結果 (16) より定理 9 の評価式が導かれる。一方，Lochak の方法はこれとまったく異なり，その上の軌道がすべて周期軌道になるようなトーラスに着目する。すると，quasi-convex 性から，その近傍では指数的安定性が自然と得られるのである。(その証明にあたっては，ハミルトニアンをこの周期軌道の振動数に関する共鳴部分と非共鳴部分とに分けて，非共鳴部分が指数的に小さくなるように変換する必要がある。) そして，ディオファントス近似の理論を用いることによって，相空間全体をそのような周期トーラスの近傍で覆うことができて，証明が完成する。

以上が 2 つの証明方法の大雑把なアイデアであるが，後者（Lochak の方法）の方が前者（Nekhoroshev の方法）に比べて議論が単純で証明も短い。しかし，前者の方法にも，steep という，より一般的な条件のもとでも使えることや，KAM 理論との統合的な議論ができるなどの利点がある。また，いずれの方法によっても，ハミルトニアンは解析的であることが必要である。

ところで，KAM 理論の節で述べたように，平衡点の近傍におけるハミルトン系は近可積分系とみなせる。したがって，その場合にも定理 9 と同様な評価式が得られることが期待されるが，じっさい以下の結果が成り立つ。

定理 10 ([Nie], [FGB], [Pos4])　$H(x,y)$ を $\mathbf{R}^{2n}$ の原点の近傍で実解析的な関数で，N 次のバーコフ標準形

$$\begin{cases} H(x,y) = h(\tau) + f(x,y)\,; \\ h(\tau) = \langle \alpha, \tau\rangle + \dfrac{1}{2}\langle A\tau,\tau\rangle + h_6(\tau) + \cdots + h_N(\tau), \qquad f(x,y) = O(|x|^{N+1} + |y|^{N+1}) \end{cases}$$

で書けるものとする。ただし，

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{R}^n, \qquad \tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n), \quad \tau_k = \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2)$$

であり，$h_j(\tau)$ は j が奇数のときは 0，偶数のときは $\tau_1,\ldots,\tau_n$ の $j/2$-次同次式である。このとき，もし $A = h_{\tau\tau}(0)$ が正定値であるならば，ある正数 δ が存在して，X_H の任意の実数解 $(x(t),y(t))$ は $|\tau(0)| < \delta^2$ ならば

$$|\tau(t) - \tau(0)| < c\delta^{2+\lambda a} \qquad \left(|t| < \frac{1}{|\alpha|}\exp\left(d\delta^{-\lambda a}\right)\right) \tag{17}$$

を満たす。ここで，$|\tau| = \sum_{k=1}^{n} |\tau_k|$，$c, d$ は A と n に依存して決まる正の定数，a, λ は

$$a = \frac{1}{2n}, \qquad \lambda = N - 3$$

である。

上記の評価は Pöschel ([Pos4]) が，Niedermann ([Nie]) と Fasso, Guzzo, Benettin ([FGB]) によって独立に得られた結果を，以下に述べる "super-exponential stability" の観点からまとめたものである。Pöschel と Niedermann の証明は Lochak の方法に基づくものであり，Fasso らによる証明は Nekhoroshev のアイデアにもとづく方法によっている。

この定理で，もし原点が非共鳴な平衡点ならば，N は任意にとれるから，評価式 (17) に現われる指数 λ はいくらでも大きくできることになる。このとき，原点は "super-exponential stability" を示すと言い ([MG] も参照)，対応する平衡解がリアプノフの意味での安定性にきわめて近い状況を示すことになる。これは第 4 節で述べた Siegel の考察を裏付けるものになっている。Giorgilli と Skokos はこの定理と同様のバーコフ標準形に対する Nekhoroshev 評価をラグランジュ平衡点 L_4 において適用し，その近傍に属するいくつかの小惑星は宇宙年齢に匹敵する時間の間，安定的に存在することを証明している ([GiS])。

参考文献

[Ar1] Arnol'd, V.I.: Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the conservation of quasiperiodic motions under a small change of the Hamiltonian function, Russian Math. Surveys **18**, 9–36 (1963).

[Ar2] Arnol'd, V.I.: Small denominators and problems of stability of motions in classical and celestial mechanics, Russian Math. Surveys **18**, 85–193 (1963).

[Ar3] Arnol'd, V.I.: On the instability of dynamical systems with many degrees of freedom, Sov. Math. Dokl., **5**, 581–585 (1964).

[Ar4] Arnol'd, V.I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd ed. Graduate Texts in Math. **60**. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1989.

[Ar5] Arnol'd, V.I.: 数理解析のパイオニアたち，蟹江幸博訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，1999.

[AA] Arnol'd, V.I, Avez A.: Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, 1967.（日本語訳：『古典力学のエルゴード問題』，吉田耕作訳，吉岡書店，1972.）

[AKN] Arnol'd, V.I, Kozlov, V.V., Neishtadt, A.I.: Mathematical aspects of classical and celestial mechanics, Encyclopeadia of Mathematical Sciencces, Vol.3 Dynamical Systems III, Springer-Verlag, 1988 [2nd edition 1993].

[BCV] Bessi, U., Chierchia, L., Valdinoci, E.: Upper bounds on Arnold diffusion times via Mather theory, J. Math. Pures Appl. **80**, 105–129 (2001).

[BG] Bartuccelli, M., Gentile, G.: Lindstedt series for perturbations of isochronous systems: a review of the general theory, Rev. Math. Phys. **14**, 121–171 (2002).

[BGG1] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A.: A proof of Nekhoroshev theorem for the stability times in neearly integrable Hamiltonian systems, Celestial Mech. **37**, 1–25 (1985).

[BGG2] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A.: Realization of holonomic constains and freezing of high frequency degrees of freedom in the light of classical perturbation theory, part II, Commun. Math. Phys. **121**, 557–601 (1989).

[Bo] Bogoyavlenskij, O.I.: Extended integrability of Bi-Hamiltonian systems, Commun. Math. Phys. **196**, 19–51 (1998).

[BH] Broer, H.W., Huitema, G.B.: A proof of the isoenergetic KAM-theorem from the "ordinary" one, J. Differential Equations **90**, 52–60 (1991).

[BHS] Broer, H.W., Huitema, G.B., Sevryuk, M.B.: Quasi-periodic motions in families of dynamical systems, Lecture Notes in Math. **1645**, Springer, 1996.

[CC] Celletti, A., Chierchia, L.: Construction of analytic KAM surfaces and effective stability bounds, Commun. Math. Phys. **118**, 119- (1988).

[CGL] Celletti, A., Giorgilli, A., Locatelli, U.: Improved estimates on the existence of invariant tori for Hamiltonian systems, Nonlinearity **13**, 397–412 (2000).

[DG] Delshams, A., Gutiérrez, P.: Effective stability and KAM theory, J. Differential Equations **128**, 415–490 (1996).

[E1] Eliasson, L.H.: Perturbations of stable invariant tori, Ann. Sc. Sup. Pisa, Cl. Sci., IV Ser. **15**, 115–147 (1988).

[E2] Eliasson, L.H.: Absolutely convergent series expansion for quasi-periodic motions, Math. Phys. electron. J. **2**, 1–33 (1996).

[FGB] Fasso, F., Guzzo, M., Benettin, G.: Nekhoroshev-stability of elliptic equilibria of Hamiltonian systems, Commun. Math. Phys. **197**, 347–360 (1998).

[Ga] Gallavotti, G.: Twistless KAM tori, quasi flat homoclinic intersections, and other cancellations in the perturbation series of certain completely integrable Hamiltonian systems. A Review, Rev. Math. Phys. **6**, 343-411 (1994).

[GL] Giorgilli, A., Locatelli, U.: Kolmogorov theorem and classical perturbation theory, ZAMP **48**, 220–261 (1997).

[GM] Gentile, G., Mastropietro, V.: Methods for the analysis of the Lindstedt series for KAM tori and renormalizability in classical mechanics: A review with some applications, Rev. Math. Phys. **8**, 393–444 (1996).

[GiMo] Giorgilli, A., Morbidelli, A.: Invariant KAM tori and global stability for Hamiltonian systems, ZAMP **48**, 102–134 (1997).

[GiS] Giorgilli, A., Skokos, C.: On the stability of the Trojan asteroids, Astron. Astrophys. **317**, 254–261 (1997).

[Gr] Graff, S.M.: On the continuation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems, J. Differential Equations **15**, 1–69 (1974).

[He] Hénon, M: Exploration numérique du problème restreint IV: mass égales, orbites non périodiques, Bull. Astron. **3**, 49–66 (1966).

[It1] Ito, H.: Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems. Comment. Math. Helv. **64**, 412–461 (1989).

[It2] Ito, H.: Action-angle coordinates at singularities for analytic integrable systems, Math. Z. **206**, 363–407 (1991).

[It3] Ito, H.: Integrability of Hamiltonian systems and Birkhoff normal forms in the simple resonance case, Math. Ann. **292**, 411–444 (1992).

[It4] 伊藤秀一: 常微分方程式と解析力学，共立出版，1998.

[It5] Ito, H.: Integrable vector fields and their convergent normal forms, in preparation.

[JV] Jorba, A., Villanueva, J.: On the normal behaviour of partially elliptic lower-dimensional tori of Hamiltonian systems, Nonlinearity **10**, 783–822 (1997).

[KKN] Kapeller, T., Kodama Y. and Némethi, A.: On the Birkhoff Normal Form of a Completely Integrable Hamiltonian System Near a Fixed Point with Resonance, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **26**, 623–661 (1998).

[Ko] Kolmogorov, A.N.: The general theory of dynamical systems and classical mechanics, 1954 年アムステルダムにおける ICM での講演，Abraham, R., Marsden, J.E.: Foundations of Mechanics, 2nd Ed., Benjamin, に Appendix として収められている。

[Ku1] Kuksin, S.B.: Nearly Integrable Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems, Lecture Notes in Math. **1556**, Springer, 1993.

[Ku2] Kuksin, S.B.: Analysis of Hamiltonian PDEs, Oxford Univ. Press, 2000.

[Lo1] Lochak, P.: Canonical perturbation theory via simultanious approximation, Russian Math. Surveys **47** 57–133 (1991).

[Lo2] Lochak, P.: Hamiltonian perturbation theory: periodic orbits, resonances and intermittency, Nonlinearity **6**, 885–904 (1993).

[Lo3] Lochak, P.: Arnold diffusion; A compendium of remarks and questions, pp.168-183 of [Sim].

[LoN] Lochak, P., Neishtadt, A.I.: Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hamiltonian, Chaos **2** 495–499 (1992).

[Ma] Mather, J.: 2001 年 7 月 Oberwolfach 数学研究所，同年 8 月 Trieste ICTP 研究所において，generic にアーノルド拡散が起こることを証明した旨の講演を行っている。筆者はまだプレプリントの存在を確認していない。

[Me1] Melnikov, V.K.: On some cases of conservation of conditionally periodic motions under a small change of the Hamiltonian function, Soviet Math. Dokl. **6**, 1592–1596 (1965).

[Me2] Melnikov, V.K.: A family of conditionally periodic solutions of Hamiltonian systems, Soviet Math. Dokl. **9**, 882–886 (1968).

[MG] Morbidelli, A., Giorgilli, A.: Superexponential stability of KAM tori, J. Stat. Phys. **78**, 1607–1617 (1995).

[Mo1] Moser, J.: On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl. II, 1–20 (1962).

[Mo2] Moser, J.: Convergent series expansions for quasiperiodic motions, Math. Ann. **169**, 136–176 (1967).

[Mo3] Moser, J.: Stable and random motions in dynamical systems, with special emphasis on celestial mechanics, Ann. Math. Studies **78**, Princeton Univ. Press., 1973.

[Ne1] Nekhoroshev, N.N.: An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, Russian Math. Surveys **32**, 1–65 (1977).

[Ne2] Nekhoroshev, N.N.: An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems II, Tr. Semin. petrovsk. **5**, 5–50 (1979); In Oleinik, O.A. (ed): Topics in Modern mathematics, Petrovskii Semin., no.5, New York, Consultant Bureau (1985).

[Nie] Niedermann, L.: Nonlinear stability around an elliptic equilibrium point in a Hamiltonian system, Nonlinearity **11**, 1465–1479 (1998).

[Per] Percival, I.C.: Chaos in hamiltonian systems, Proc. Royal Soc. London A **413**, 131–144 (1987).

[Poi] Poincaré, H.: Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tome **2**, Gauthier-Villars, 1893. 英訳（D. l. Goroff による解説付き）が History of Modern Physics and Astromomy, Vol. 13 として Amer. Inst. Phys. より出ている。

[Pos1] Pöschel, J.: Integrability of Hamiltonian Systems on Cantor Sets, Commun. Pure Appl. Math. **35**, 653–695 (1982).

[Pos2] Pöschel, J.: On elliptic lower dimensional tori in Hamiltonian systems, Math. Z. **202**, 559–608 (1989).

[Pos3] Pöschel, J.: On Nekhoroshev's estimate for quasiconvex Hamiltonians, Math. Z. **213**, 187–216 (1993).

[Pos4] Pöschel, J.: On Nekhoroshev's Estimate at an Elliptic Equilibrium, IMRN (Inter. Math. Res. Notices), 1999 No.4, 203–215 (1999).

[Sev] Sevryuk, M.B.: Invariant tori of Hamiltonian Systems that are nondegenerate in Rüssman's sense, Dokl. Math. **53**, 69–72 (1996).

[Sie] Siegel, C.L.: Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Math. Ann. **128**, 144–170 (1954).

[SM] Siegel, C.L., Moser, J.K.: Lectures on Celestial Mechanics, Springer, 1973.

[Sim] Simó, C. (ed): Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom, NATO ASI Series C: Math. Physics. Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.

[St1] Stolovitch, L.: Singular complete integrability, Publ. I.H.E.S. **91**, 133-210 (2000).

[St2] Stolovitch, L.: Normalisation holomorphe d'algèbres de type Cartan de champs de vecteurs holomorphes singuliers, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **330**, 121–124 (2000); Technical Report **186**, Prépublication E. Picard, mars 2000, 1–27.

[SZ] Salamon, D., Zehnder, E.: KAM theory in configuration space, Comment. Math. Helvetici **64**, 84–132 (1989).

[Tr1] Treschev, D.V.: A mechanism for the destruction of resonance tori in Hamiltonian systems, Math. USSR Sb. **68**, 181–203 (1991).

[Xia] Xia, Z.: Arnold Diffusion: A Vatiational Construction, Documenta Mathematica, Extra Vol. ICM II, 867–877 (1998).

[XY] Xu, J., You, J: Persistence of lower-dimensional tori under the first Melnikov's non-resonance condition, J. Math. Pures Appl. **80**, 1045–1067 (2001).

[XYQ] Xu, J., You, J, Qiu, Q: Invariant tori for nearly integrable Hamiltonian systems with degeneracy, Math. Z. **226**, 375–387 (1997).